На правах рукописи

ШАПАРЬ Юлия Викторовна

РАСШИРЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ В КЛАССЕ КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫХ МЕР

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2011

Работа выполнена в отделе управляемых систем Института математики и механики Уральского отделения РАН.

Научный руководитель:	член-корреспондент РАН Ченцов Александр Георгиевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Тарасьев Александр Михайлович, кандидат физико-математических наук Логинов Михаил Иванович
Ведущая организация:	Удмуртский государственный университет, г. Ижевск

Защита состоится 22 июня 2011 года в 10 часов на заседании специализированного совета Д 004.006.01 по защите диссертаций на соискание ученой степени доктора физико-математических наук при Институте математики и механики Уральского отделения РАН по адресу: 620990, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и механики УрО РАН.

Автореферат разослан 17 мая 2011 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физ.-мат. наук Н.Ю. Лукьянов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена исследованию конструкций расширения некоторых абстрактных задач управления, не обладающих устойчивостью при ослаблении ограничений.

Актуальность темы

Теория управления является разделом современной математики, связанным с оптимизацией динамических процессов различной природы. Она находит многочисленные приложения в технике, медицине, биологии, экономике. Основополагающее значение в теории управления имеет принцип максимума Л.С. Понтрягина. Задачи управления в условиях неопределенности формализуются в рамках теории дифференциальных игр. Задачи такого вида возникают при управлении техническими системами, осложненными действием помех. Построение строгой математической теории задач конфликтного управления следует связать прежде всего с именами Л. С. Понтрягина[1], Н. Н. Красовского[2], Б. Н. Пшеничного и А. И. Субботина.

Существенное влияние на развитие теории управления в игровой постановке оказали работы Р. В. Гамкрелидзе, А. В. Кряжимского, А. Б. Куржанского, Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Осипова, Ф. Л. Черноусько, J. P. Aubin, T. Basar, P. Bernhard, J. V. Breakwell, L. Berkovitz, M. G. Crandall, R. J. Elliot, A. Friedman N. J. Kalton, G. Leitmann, J. Lin, P. L. Lions, C. Ryll-Nardzewski, P. Varaiya, J. Warga.

Большой вклад в теорию дифференциальных игр и ее приложения внесли Э.Г.Альбрехт, В.Д. Батухтин, С.А. Брыкалов, Н.Л. Григоренко, П.Б. Гусятников, М.И. Зеликин, А.Ф. Клеймёнов, А.А. Меликян, Н.Ю. Лукоянов, М.С. Никольский, В.В. Остапенко, В.С. Пацко, Н.Н. Петров, Л.А. Петросян, Е.С. Половинкин, Н.Н. Субботина, В.Е. Третьяков, А.М. Тарасьев, В.И. Ухоботов, В.Н. Ушаков, А.Г. Ченцов, А.А. Чикрий, С.В. Чистяков, M. Bardi, E.N. Barron, A. Blaquiere, I. Capuzzo Dolcetta, M. Falcone, L.C. Evans, R. Jensen, M. Ishii, J. Lewin, P. Soravia, P.E. Souganidis и многие другие ученые.

[1]Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1961

[2]Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1968

В связи с построением методов решения позиционных дифференциальных игр предпринимались исследования в области игровых задач программного управления; такой подход нашел свое отражение в исследованиях уральской школы Н. Н. Красовского и, прежде всего, в работах Н. Н. Красовского, А. Б. Куржанского, Ю. С. Осипова и А. И. Субботина. В упомянутых игровых задачах программного управления широко использовались элементы теории расширений с применением управлений-мер; это проявилось, в частности, при построении вспомогательных программных конструкций для решения нелинейных дифференциальных игр, включая исследование соответствующих условий регулярности, при которых возможен непосредственный переход от игровых задач программного управления к построению процедур управления по принципу обратной связи. Данное направление было развито Н. Н. Красовским и его учениками. Существенным моментом в исследованиях являлось построение обобщенных игровых задач управления, включая задачи с фазовыми ограничениями (отметим, в частности, применение обобщенных управлений в конструкциях метода программных итераций ; см. работы А. Г. Ченцова), для которых потребовалось по существу рассматривать режимы управления «на грани фола» при соблюдении упомянутых ограничений. В связи с применением управлений-мер и скользящих режимов в задачах программного управления отметим также работы Р. В. Гамкрелидзе и J. Warga. Обобщенные управления-меры использовались также при построении квазистратегий в работах Н. Н. Красовского, А. В. Кряжимского, А. И. Субботина, А. Г. Ченцова. Вышеупомянутые конструкции использовались в задачах управления с геометрическими ограничениями, систематическое исследование которых было начато Л. С. Понтрягиным.

В случае задач управления с импульсными ограничениями на этапе построения расширений нередко возникают эффекты, имеющие смысл произведения разрывной функции на обобщенную, что требует (уже в случае управления линейными системами) построения специального математического аппарата, использующего линейные непрерывные функционалы на пространствах разрывных функций. Возникает также необходимость и в использовании задач управления с ослабленными ограничениями (релаксации задач управления). В частности, это касается краевых и промежуточных условий, которые нередко сводятся к ограничениям моментного характера. Использование релаксаций существенно в игровых постановках. Речь идет о неустойчивых задачах, в которых по самому смыслу следует ориентироваться на соблюдение ограничений с высокой, но все же конечной степенью точности. Последнее типично для задач управления техническими системами с элементами импульсных ограничений, что имеет отношение, в частности, к задачам космической навигации.

Исследование различных вариантов асимптотического поведения при соблюдении «моментных» ограничений может осуществляться с применением аппарата конечно-аддитивной теории меры[3]; это связано с тем, что пространство линейных непрерывных функционалов на одном весьма важном банаховом пространстве разрывных (точнее, ярусных) функций отождествимо с надлежащим пространством конечно-аддитивных мер ограниченной вариации. Отметим здесь же «хорошие» условия $*$-слабой компактности (теорема Алаоглу), что позволяет использовать конечно-аддитивные меры в конструкциях расширений [4]. Более того, в классе линейных управляемых систем с разрывностью в коэффициентах при управляющих воздействиях с использованием конечно-аддитивных мер ограниченной вариации со свойством слабой абсолютной непрерывности [5] удается формализовать целый ряд эффектов типа произведения разрывной функции на обобщенную, что в конечном итоге позволяет построить обобщенные задачи управления[6] в классе конечно-аддитивных мер, в процессе решения которых адекватно воспроизводятся нужные асимптотические аналоги областей достижимости и пучков траекторий, соответствующих случаю точного соблюдения традиционных ограничений. Точнее, такие обобщенные задачи управления доставляют полезные представления так называемых множеств притяжения [7]. В простейшем случае, достаточном, однако, для большинства положений диссертации, упомянутые множества притяжения соответствуют действию так называемых секвенциальных приближенных решений в духе J. Warga [8] в части форми-

[3]Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: Изд-во ин. лит., 1962

[4]Chentsov A. G. Asymptotic attainability. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Publishers, 1997

[5]Rao K.P.S.B., Rao M.B. Theory of charges. A study of finitely additive measures. London: Academic Press. – 1983

[6]Ченцов А. Г. К вопросу о построении корректных расширений в классе конечно-аддитивных мер. // Известия вузов. Математика. 2002. – № 2. – с. 58–80

[7]Ченцов А. Г. Расширения абстрактных задач о достижимости: несеквенциальная версия. // Труды ИММ. 2007. – Т. 13, – № 2. – с. 184–217

[8]Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М.: Наука, 1977

рования элементов соответствующего пространства оценок или результатов при условии соблюдения ограничений асимптотического характера, возникающих при последовательном ослаблении стандартных ограничений. Данные множества притяжения широко использовались в абстрактных задачах о достижимости [9]. В настоящей работе множества притяжения соответствуют последовательному ослаблению «моментных» ограничений. В рассматриваемом случае оказывается удобным применить для целей представления множеств притяжения конструкцию расширения в классе конечно-аддитивных мер со свойством слабой абсолютной непрерывности относительно заданной конечно-аддитивной (вообще говоря) неотрицательной меры. Отметим, что в случае задачи управления линейной системой эту меру можно определить в виде сужения меры Лебега на подходящую измеримую структуру (в простейшем случае — на полуалгебру так называемого пространства-стрелки; имеется в виду фиксированный полуинтервал вещественной прямой с полуалгеброй полуинтервалов аналогичного типа, содержащихся в исходном промежутке управления). Упомянутая конструкция расширения[10] реализуется в игровом варианте.

Следует иметь в виду, что при расширении игровой задачи управления «объектом расширения» является, строго говоря, пара управлений игроков или их совокупное управляющее воздействие (это касается как «обычных» задач управления, так и их абстрактных аналогов). В ряде случаев упомянутое расширение совокупных управлений допускает декомпозицию: можно независимо реализовать процедуру расширения пространства обычных управлений каждого из игроков и при этом достичь того же эффекта, что и при расширении пары управлений. Как раз такая ситуация имеет место в задачах, рассматриваемых в диссертации. Иными словами, в дальнейшем активно используется принцип декомпозиции конструкций расширения. Это позволяет установить представление асимптотики реализуемых значений максимина в игровых задачах с ослабленными ограничениями (эти задачи играют, следовательно, роль релаксаций исходной задачи с невозмущенными ограничениями). Кроме того, исследуются достаточные условия устойчивости по

[9] Chentsov A.G. Finitely additive measures and relaxations of abstract control problems. // Journal of Mathematical Sciences, 2006.- vol.133,- № 2 - p. 1045-1206

[10] Ченцов А.Г. Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач. Екатеринбург: УИФ «Наука», 1993

максимину.

Наряду с общими положениями, касающимися абстрактных задач управления, рассматриваются конкретные варианты игровых задач программного импульсного управления материальной точкой (этим вопросам посвящена последняя глава диссертации).

Цель работы

Построение корректных расширений абстрактных игровых задач управления с ограничениями, включающими импульсную и «моментную» компоненты, исследование вопросов устойчивости по результату при ослаблении ограничений моментного характера, которые могут, в частности порождаться краевыми и промежуточными условиями.

Методы исследования

В работе используются методы теории управления, функционального анализа, общей топологии, теории меры, элементы теории игр.

Научная новизна

Построено расширение линейной задачи управления системой с разрывностью в коэффициентах при управляющих воздействиях, что позволяет решить проблему существования оптимальных программных управлений в классе конечно-аддитивных мер. Для абстрактной игровой задачи управления, не обладающей, вообще говоря, устойчивостью при ослаблении ограничений моментного характера, построено корректное расширение, определяющее асимптотику реализуемых значений максимина при последовательном ужесточении ослабленных ограничений. Получены условия, достаточные для устойчивости по результату (устойчивости по максимину) при ослаблении «моментных» ограничений. Результаты диссертационной работы являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость

Конструкции расширений в классе конечно-аддитивных мер, используемые в работе и применяемые ранее при исследовании экстремальных задач и задач о достижимости, реализованы в игровой постановке, включая случай неустойчивых задач управления, в которых допускаются разрывные зависимости в описании правых частей дифференциальных уравнений и импульсных ограничений различных типов. Предлагаемые в диссертации методы позволяют исследовать структуру линейных игровых задач управления с элементами импульсных ограничений в рамках формализации, использующей конечно-аддитивные меры в качестве обобщенных элементов, что доставляет, в частности, естественное описание эффектов, имеющих смысл произведения разрывной функции на обобщенную. Этот подход распространен на широкий класс абстрактных игровых задач, допускающих вхождение разрывных зависимостей в описание задачи. В практическом отношении результаты работы полезны для исследования задач импульсного управления в игровой постановке; такие задачи нередко возникают в инженерных приложениях, связанных с управлением техническими системами.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях: международная конференция «IFAC Workshop on Control Applications of Optimization» (University of Juvaskyla, Finland, May 6 - 8, 2009); Всероссийская конференция «Динамические системы, управление и наномеханика» (Ижевск, 24-28 июня 2009); международная конференция «Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения ОПУ-2009» (Тамбов, 5-9 октября 2009); 41-я Всероссийская молодежная школа-конференция «Проблемы теоретической и прикладной математики» (Екатеринбург, 1-5 февраля 2010); международная конференция «The Fourth International Conference Game Theory and Management GTM -2010» (St.Petersburg, June 28-30, 2010); 42-я Всероссийская молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики» (Екатеринбург, 30 января-6 февраля 2011).

Результаты работы докладывались на семинарах отдела управляемых систем ИММ УрО РАН, на семинаре кафедры дифференциальных уравнений Удмуртского государственного университета (городской семинар «Дифференциальные уравнения и теория управления», Ижевск, 2010).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[10]. В совместных с А. Г. Ченцовым работах [1]–[4], [6], [9], [10] А. Г. Ченцову принадлежат постановки задач, общая схема исследования и некоторые идеи доказательств; доказательства основных положений проведены автором диссертации самостоятельно.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, списка обозначений и списка литературы. Главы разбиты на разделы. Нумерация разделов двойная: первая цифра – номер главы, вторая – номер раздела. Нумерация формул, теорем и предложений тройная: первая цифра - номер главы, вторая – номер раздела, третья – номер утверждения в текущем разделе. Объем работы 132 страницы, библиография содержит 49 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается краткий обзор литературы, определяется цель работы, кратко излагаются основные результаты диссертации.

Первая глава состоит из восьми разделов. В ней вводятся определения и обозначения общего характера, а также рассматривается линейная игровая задача программного управления с фиксированным моментом окончания. Управляющие воздействия полагаются программными, скалярными и удовлетворяющими некоторым ограничениям импульсного характера. Предполагается выполненным известное неособое линейное преобразование управляемой системы[11], приводящее исходную систему к виду

$$\dot{x} = u(t)\alpha(t) + v(t)\beta(t); \tag{1}$$

$t \in I \triangleq [t_0, \theta_0[$; $I_0 \triangleq [t_0, \theta_0]$. Управления $u = u(\cdot)$ и $v = v(\cdot)$ полагаем сейчас для простоты кусочно-постоянными (к.-п.) и непрерывными справа (н.спр.). Считаем также, что $u(t)$ и $v(t)$ — скаляры в каждый момент $t \in I$. Функции $\alpha(\cdot) = (\alpha(t), t \in I)$ и $\beta(\cdot) = (\beta(t), t \in I)$ принимают значения в $\mathbb{R}^n$ и могут быть разрывными. Будем полагать сейчас компоненты вектор-функций $\alpha(\cdot)$ и

[11]Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974, с.161

$\beta(\cdot)$ равномерными пределами вещественнозначных (в/з), к.-п., н.спр. функций. Далее будут введены более общие условия. Полагаем, что даны непустые множества U и V, элементами которых являются в/з, к. - п. и н.спр. функции на $I: u \in U$, $v \in V$. Пусть фиксирован вектор $x_0 \in \mathbb{R}^n$, определяющий начальное условие системы (1): $x(t_0) = x_0$. Один из естественных вариантов исследуемой в работе задачи состоит в оптимизации критерия вида $\mathfrak{f}_0(x(\theta_0))$, где $\mathfrak{f}_0$ — непрерывная функция, а $x(\cdot)$ — траектория (1), определяемая парой программных управлений из U и V; ниже рассматривается задача на (программный) максимин, в которой, однако, экстремумы могут не достигаться. В этой связи конструируется расширение, которое сразу рассматривается в более общей постановке.

Пусть $\mathcal{L}$ — полуалгебра подмножеств I, удовлетворяющая следующим двум условиям: 1) $[a,b[\in \mathcal{L}$ при $a \in I_0$ и $b \in I_0$; 2) все множества из $\mathcal{L}$ измеримы по Борелю (как подмножества I). В дальнейшем будем использовать (ярусные[12]) функции, допускающими равномерное приближение ступенчатыми. Заметим, что в простейшем случае, когда $\mathcal{L}$ есть семейство всех промежутков $[a,b[$, $a \in I_0, b \in I_0$ (полуалгебра пространства-стрелки), ступенчатые относительно $(I,\mathcal{L})$ функции — суть к.-п. и н.спр. в/з функции на I и только они (такой вариант $\mathcal{L}$ следует иметь в виду в упомянутом выше варианте содержательной постановки задачи программного управления системой (1)). Далее $B_0(I,\mathcal{L})$ — множество всех $\mathcal{L}$-ступенчатых в/з функций на I; $B(I,\mathcal{L})$ замыкание $B_0(I,\mathcal{L})$ в топологии sup-нормы пространства всех ограниченных в/з функций на I. Через $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ будем обозначать множество всех в/з к.-а. мер ограниченной вариации, определенных на $\mathcal{L}$; $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ можно оснащать стандартной $*$-слабой топологией[13] $\tau_*(\mathcal{L})$. При этом $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L}))$ есть локально-выпуклый σ-компакт (условия компактности в $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ определяются теоремой Алаоглу). Через λ условимся обозначать сужение меры Лебега на $\mathcal{L}$. Через $\mathbb{A}_\lambda[\mathcal{L}]$ обозначаем множество всех к.-а. мер $\mu \in \mathbb{A}(\mathcal{L})$ со свойством слабой абсолютной непрерывности:

$$\forall L \in \mathcal{L} \;\; (\lambda(L) = 0) \Rightarrow (\mu(L) = 0).$$

Используем далее операцию $*$-слабого замыкания при погружении подмно-

[12]Меленцов А.А., Байдосов В.А., Змеев Г.М. Элементы теории меры и интеграла. Свердловск.: УрГУ, 1980

[13]Ченцов А.Г. Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач. Екатеринбург: УИФ «Наука», 1993, с. 71

жеств $B(I,\mathcal{L})$ в $\mathbb{A}_\lambda[\mathcal{L}]$. Простейший пример меры из $\mathbb{A}_\lambda[\mathcal{L}]$ доставляет неопределенный λ-интеграл функции из $B(I,\mathcal{L})$: если $f \in B(I,\mathcal{L})$, то через $f * \lambda$ обозначаем неопределенный λ-интеграл f, $f*\lambda \in \mathbb{A}_\lambda[\mathcal{L}]$. Фиксируем непустые множества U и V, $U \subset B_0(I,\mathcal{L})$, $V \subset B_0(I,\mathcal{L})$. Элементы множеств U и V рассматриваем в качестве обычных управлений *первого и второго* игроков; предполагаем, что выполнены условия интегральной ограниченности:

$$\left(\int_I |u|\,d\lambda \leqslant c_U \quad \forall u \in U\right) \& \left(\int_I |v|\,d\lambda \leqslant c_V \quad \forall v \in V\right); \tag{2}$$

здесь $c_U \in \;]0,\infty[$ и $c_V \in \;]0,\infty[$ фиксированы. При $u \in U$ и $v \in V$ через $\varphi_{u,v}$ обозначаем траекторию (1), определенную на отрезке I_0. Полагаем заданной непрерывную функцию $\mathbf{f}_0$, определенную на $\mathbb{R}^n$, в качестве аргумента которой используем терминальное состояние $\varphi_{u,v}(\theta_0)$. В терминах $\mathbf{f}_0$ определяем критерий игровой задачи в виде функционала Φ на $U \times V$ со значениями в $\mathbb{R}$

$$\Phi(u,v) = \mathbf{f}_0(\varphi_{u,v}(\theta_0)) = \mathbf{f}_0\Bigg(x_0 + \int_I u(\tau)\alpha(\tau)\lambda(d\tau) + \\ + \int_I v(\tau)\beta(\tau)\lambda(d\tau)\Bigg) = f_0\left(\left(\int_I \alpha_i u\,d\lambda\right)_{i\in\overline{1,n}}, \left(\int_I \beta_j v\,d\lambda\right)_{j\in\overline{1,n}}\right), \tag{3}$$

где функция $f_0 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ связана с $\mathbf{f}_0$ соотношением: $f_0(x,y) \triangleq \mathbf{f}_0(x_0 + x + y)$ при $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что в рамках представления (3) могут быть реализованы и другие варианты содержательной задачи на максимин.

Первый игрок, формирующий $u \in U$ стремится минимизировать (3). Цель *второго* игрока, формирующего $v \in V$, противоположна. Итак, исходная задача имеет вид: $\Phi(u,v) \to \sup\limits_{v\in V}\inf\limits_{u\in U}$.

Уже в простейших задачах такого типа может не существовать обычное максиминное программное управление. Цель построения конструкции расширения в данной главе сводится к решению упомянутой проблемы существования посредством компактификации пространства обычных управлений каждого из игроков. Множества обобщенных управлений определяем в виде

$$\left(\widetilde{U} \triangleq \mathrm{cl}\,(\{u * \lambda : u \in U\}, \tau_*(\mathcal{L}))\right) \& \left(\widetilde{V} \triangleq \mathrm{cl}\,(\{v * \lambda : v \in V\}, \tau_*(\mathcal{L}))\right).$$

Вводим обобщенные траектории [14]

$$\widetilde{\varphi}_{\mu,\nu} \triangleq \left(x_0 + \int_{[t_0,t[} \alpha(\tau)\mu(d\tau) + \int_{[t_0,t[} \beta(\tau)\nu(d\tau) \right)_{t \in I_0},$$

рассматривая $\mu \in \widetilde{U}$ и $\nu \in \widetilde{V}$ в качестве обобщенных управлений.

Строим обобщенную задачу на максимин в классе к.-а. управлений-мер $\widetilde{\Phi}(\mu,\nu) \to \max\limits_{\nu \in \widetilde{V}} \min\limits_{\mu \in \widetilde{U}}$, допускающую, как показано в работе, аппроксимативную реализацию в классе обычных управлений. Здесь $\widetilde{\Phi} : (\mu,\nu) \mapsto \mathrm{f}_0(\widetilde{\varphi}_{\mu,\nu}(\theta_0)) : \widetilde{U} \times \widetilde{V} \to \mathbb{R}$ есть функция платы в обобщенной задаче.

Предложение 1. *Справедливо равенство*

$$\mathbb{V} = \max_{\nu \in \widetilde{V}} \min_{\mu \in \widetilde{U}} \widetilde{\Phi}(\mu,\nu) = \sup_{v \in V} \inf_{u \in U} \Phi(u,v).$$

Через $\widetilde{V}_{\mathrm{opt}}[f_0]$ обозначаем множество всех максиминных обобщенных управлений второго игрока; будем также рассматривать множества $\widetilde{V}_{\mathrm{opt}}[f]$, получаемые при замене f_0 на f. Пусть $\mathbb{G} \triangleq \{\varphi_{u,v}(\theta_0) : u \in U, v \in V\}$, $\overline{\mathbb{G}}$ — замыкание $\mathbb{G}$ в $\mathbb{R}^n$ с обычной топологией, совпадающее с областью достижимости в классе обобщенных управлений (непустой компакт в $\mathbb{R}^n$), $\|\cdot\|$ — норма равномерной сходимости в пространстве $\mathbb{C}(\overline{\mathbb{G}})$ непрерывных в/з функций на $\overline{\mathbb{G}}$. Через $\widetilde{\tau}^*_V(\mathcal{L})$ обозначим топологию множества $\widetilde{V}$, индуцированную[15] в этом множестве из $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L}))$.

Предложение 2. *Если* $f_0 \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^n)$, *а* $G^0 \in \widetilde{\tau}^*_V(\mathcal{L})$ — *окрестность множества* $\widetilde{V}_{\mathrm{opt}}[f_0] = \left\{ \nu_0 \in \widetilde{V} \mid \min\limits_{\mu \in \widetilde{U}} \widetilde{\Phi}(\mu,\nu) \leqslant \min\limits_{\mu \in \widetilde{U}} \widetilde{\Phi}(\mu,\nu_0)\ \forall \nu \in \widetilde{V} \right\}$ *в* $(\mathbb{A}(\mathcal{L}), \tau_*(\mathcal{L}))$, *т.е.* $\widetilde{V}_{\mathrm{opt}}[f_0] \subset G^0$, *то*

$$\exists \delta \in]0,\infty[\ \forall f \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^n)\ \left(\|(f|\overline{G}) - (f^0|\overline{G})\| < \delta \right) \Rightarrow \left(\widetilde{V}_{\mathrm{opt}}[f] \subset G^0 \right).$$

Установлена устойчивость обобщенной задачи при возмущении целевой функции (близость последней оценивается в метрике равномерной сходимости). В заключении главы указаны конкретные классы расширений, допускающие применение теоретических методов, излагаемых в первой главе.

[14] Ченцов А.Г. Конечно-аддитивные меры и релаксации экстремальных задач. Екатеринбург: УИФ «Наука», 1993, с.132

[15] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986, с.111

Вторая глава состоит из шести разделов. В ней рассматривается абстрактная задача на максимин

$$f_0\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i u\, d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j v\, d\eta_2\right)_{j\in\overline{1,l}}\right) \to \sup_{v\in V} \inf_{u\in U}$$

при некоторых дополнительных ограничениях. Здесь f_0 — непрерывная по совокупности переменных в/з функция на $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$, I_1 и I_2 — непустые множества с измеримыми структурами в виде (непустых) семейств $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ (подмножеств I_1 и I_2) соответственно; в основной части работы предполагается, что $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ — полуалгебры множеств; в частности, допускается, что $(I_1, \mathcal{L}_1)$ и $(I_2, \mathcal{L}_2)$ — стандартные измеримые пространства. Далее используются пространства $\mathbb{A}(\mathcal{L}_1)$ и $\mathbb{A}(\mathcal{L}_2)$, определяемые подобно пространству $\mathbb{A}(\mathcal{L})$ первой главы; аналогичным образом вводим также $*$-слабые топологии $\tau_*(\mathcal{L}_1), \tau_*(\mathcal{L}_2)$. В качестве η_1 и η_2 используются неотрицательные в/з к.-а. меры на $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ соответственно; $(\alpha_i)_{i\in\overline{1,k}}$, $(\beta_j)_{j\in\overline{1,l}}$ — два кортежа ярусных в/з функций на $(I_1, \mathcal{L}_1)$ и $(I_2, \mathcal{L}_2)$ соответственно. Функции u и v полагаются ярусными в смысле $(I_1, \mathcal{L}_1)$ и $(I_2, \mathcal{L}_2)$ соответственно, причем допускается их произвольный выбор в пределах заданных множеств U и V при соблюдении ограничений

$$\left(\int_{I_1} \gamma_i u\, d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,p}} \in Y, \quad \left(\int_{I_2} \omega_j v\, d\eta_2\right)_{j\in\overline{1,q}} \in Z, \tag{4}$$

где Y и Z — непустые замкнутые подмножества $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно, а $(\gamma_i)_{i\in\overline{1,p}}$ и $(\omega_j)_{j\in\overline{1,q}}$ суть ярусные в/з функции на $(I_1, \mathcal{L}_1)$ и $(I_2, \mathcal{L}_2)$ соответственно.

В разделе 2.2 приводится пример задачи, в котором (4) конкретизируются в виде краевых условий. Предполагается, что для некоторых значений $c_U \in [0, \infty[$, $c_V \in [0, \infty[$ выполняются условия, которые в дальнейшем возмущаться не будут (абстрактный вариант импульсных ограничений):

$$\left(\int_{I_1} |u|\, d\eta_1 \leqslant c_U \ \forall u \in U\right) \ \& \ \left(\int_{I_2} |v|\, d\eta_2 \leqslant c_V \ \forall v \in V\right).$$

Критерий игровой задачи определяется непрерывной функцией f_0 по следующему правилу:

$$\Phi : (u, v) \mapsto f_0\left(\left(\int_{I_1} \alpha_i u\, d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j v\, d\eta_2\right)_{j\in\overline{1,l}}\right) : U \times V \to \mathbb{R}.$$

Отметим, что конкретный вариант упомянутой абстрактной задачи можно получить, рассматривая, в частности, задачу управления системой (1), (2) при наличии краевых и промежуточных условий (см. пример в разделе 2.2).

Далее рассматривается постановка, в которой допускается ослабление условий (4). Исследуется вопрос, связанный с представлением асимптотики реализуемых (в классе обычных управлений) значений максимина, отвечающих «малым» возмущениям (4).

$$U_\partial[\alpha] \triangleq \left\{ u \in U \mid \left(\int_{I_1} \gamma_i u \, d\eta_1 \right)_{i \in \overline{1,p}} \in O_\alpha^{(p)}[Y] \right\}, \tag{5}$$

$$V_\partial[\alpha] \triangleq \left\{ v \in V \mid \left(\int_{I_2} \omega_j v \, d\eta_2 \right)_{j \in \overline{1,q}} \in O_\alpha^{(q)}[Z] \right\}. \tag{6}$$

В (5), (6) имеем «обычные» множества допустимых управлений, отвечающих ослабленным ограничениям. Представляет интерес рассмотрение множеств (5), (6) при $\alpha \approx 0$; кроме того, конкретная степень ослабления точных ограничений в множествах типа (5) и (6) может быть различной (при $\alpha = \alpha_1 > 0$ в (5) и $\alpha = \alpha_2 > 0$ в (6)). Переход к случаю $\alpha = 0$ мы сопровождаем расширением исходной задачи, для чего полагаем в дальнейшем

$$\widetilde{U} \triangleq \mathrm{cl}(\{u * \eta_1 : u \in U\}, \tau_*(\mathcal{L}_1)); \widetilde{V} \triangleq \mathrm{cl}(\{v * \eta_2 : v \in V\}, \tau_*(\mathcal{L}_2)). \tag{7}$$

Элементы множеств (7) суть обобщенные управления *первого* и *второго* игроков соответственно. Тогда множества допустимых обобщенных управлений *первого* и *второго* игроков определяются условиями:

$$\widetilde{U}_\partial \triangleq \left\{ \mu \in \widetilde{U} \mid \left(\int_{I_1} \gamma_i \, d\mu \right)_{i \in \overline{1,p}} \in Y \right\}, \widetilde{V}_\partial \triangleq \left\{ \nu \in \widetilde{V} \mid \left(\int_{I_2} \omega_j \, d\nu \right)_{j \in \overline{1,q}} \in Z \right\}.$$

Из общих положений теории расширений [16] вытекает, что

$$(\widetilde{U}_\partial \neq \varnothing) \Leftrightarrow (U_\partial[\varepsilon] \neq \varnothing \ \forall \varepsilon \in]0, \infty[); \quad (\widetilde{V}_\partial \neq \varnothing) \Leftrightarrow (V_\partial[\delta] \neq \varnothing \ \forall \delta \in]0, \infty[).$$

Полагаем далее, что обобщенная задача совместна: $\left(\widetilde{U}_\partial \neq \varnothing\right)$ & $\left(\widetilde{V}_\partial \neq \varnothing\right)$. Стандартным образом определяем максимин в каждой задаче с ослабленны-

[16] Chentsov A. G. Asymptotic attainability. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Publishers, 1997

ми ограничениями: при $\varepsilon \in]0,\infty[$ и $\delta \in]0,\infty[$ полагаем

$$\mathfrak{V}(\varepsilon,\delta) \triangleq \sup_{v\in V_\partial[\delta]} \inf_{u\in U_\partial[\varepsilon]} \Phi(u,v) =$$

$$= \sup_{v\in V_\partial[\delta]} \inf_{u\in U_\partial[\varepsilon]} f_0\left(\left(\int_{I_1}\alpha_i u\, d\eta_1\right)_{i\in\overline{1,k}}, \left(\int_{I_2}\beta_j v\, d\eta_2\right)_{j\in\overline{1,l}}\right) \in \mathbb{R}.$$

В разделе 2.4 рассматриваются множества притяжения[17], отвечающие последовательному ослаблению ограничений моментного характера и их представления в терминах абстрактных аналогов множеств достижимости в классе обобщенных управлений. Для представления множеств притяжения[18] используются аналоги областей достижимости в обобщенной задаче:

$$\mathbb{G}_U^{(1)} = \mathcal{A}^1\left(\widetilde{U}_\partial\right) = \mathcal{A}^1\left(\Gamma^{-1}(Y)\right), \quad \mathbb{G}_V^{(2)} = \mathcal{B}^1\left(\widetilde{V}_\partial\right) = \mathcal{B}^1\left(\Omega^{-1}(Z)\right),$$

где $\mathcal{A} : \mu \mapsto \left(\int_{I_1}\alpha_i\, d\mu\right)_{i\in\overline{1,k}}$, $\mathcal{B} : \nu \mapsto \left(\int_{I_2}\beta_j\, d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}$, $\Gamma : \mu \mapsto \left(\int_{I_1}\gamma_i\, d\mu\right)_{i\in\overline{1,k}}$, $\Omega : \nu \mapsto \left(\int_{I_2}\omega_j\, d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}$; $\mathcal{A}$ и Γ определены на $\widetilde{U}$, а $\mathcal{B}$ и Ω определены на $\widetilde{V}$. При этом погружение обычных управлений из U и V в соответствующие пространства обобщенных управлений осуществляется по правилам $u \mapsto u * \eta_1 : U \to \widetilde{U}$; $v \mapsto v * \eta_2 : V \to \widetilde{V}$.

В разделе 2.5 установлено представление асимптотики реализуемых значений максимина в условиях ослабленных ограничений в терминах стандартного максимина «непрерывной» игровой задачи, в которой множества допустимых элементов задаются непустыми компактами в пространствах к.-а. мер ограниченной вариации. Эти построения соответствуют идеологии исследования[19] общих вопросов реализации максимина в условиях ограничений асимптотического характера. Здесь, однако, используется специфика рассматриваемой задачи с «моментными» ограничениями и конкретная конструкция расширения в классе к.-а. мер.

Максимин в обобщенной задаче при точном соблюдении ограничений есть

$$\mathbf{V} = \max_{\nu\in\widetilde{V}_\partial} \min_{\mu\in\widetilde{U}_\partial} f_0\left(\left(\int_{I_1}\alpha_i\, d\mu\right)_{i\in\overline{1,k}}, \left(\int_{I_2}\beta_j\, d\nu\right)_{j\in\overline{1,l}}\right) = \max_{z\in\mathbb{G}_V^{(2)}} \min_{y\in\mathbb{G}_U^{(1)}} f_0(y,z).$$

[17]Chentsov A. G. Asymptotic attainability. Dordrecht-Boston-London: Kluwer Publishers, 1997

[18]Ченцов А. Г. Расширения абстрактных задач о достижимости: несеквенциальная версия. // Труды Института математики и механики. 2007.– Т. 13, – № 2. – с. 184–217.

[19]Ченцов А. Г. О представлении максимина в игровой задаче с ограничениями асимптотического характера. // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. – № 3. – с. 104–119

Обобщенный максимин определяет асимптотику реализуемых значений обычного максимина при последовательном ужесточении ослабленных ограничений.

Теорема 1. *Если* $\zeta \in]0,\infty[$, *то* $\exists \theta_\zeta \in]0,\infty[$: $|\mathfrak{V}(\varepsilon,\delta) - \mathbb{V}| < \zeta \quad \forall \varepsilon \in]0,\theta_\zeta[\quad \forall \delta \in]0,\theta_\zeta[$.

В заключении раздела аналогично тому, как это делалось в главе 1, приводится ряд конкретных примеров упорядоченных пар $(U,\widetilde{U})$ и $(V,\widetilde{V})$, удовлетворяющих условиям (7), а также конструируется несеквенциальное приближенное решение для случая традиционных импульсных ограничений в виде направленности в пространстве обычных управлений второго игрока, гарантирующее ему результат не хуже обобщенного максимина с любой наперед выбранной точностью (несеквенциальный аналог приближенного решения J. Warga).

В разделе 2.6 получены достаточные условия устойчивости по максимину. С учетом теоремы 1 устойчивость отождествляется со свойством совпадения максимина в обобщенной задаче (определяющего асимптотику реализуемых значений максимина при ослабленных ограничениях моментного характера) и максимина в классе обычных управлений при точном соблюдении моментных ограничений. В начале раздела исследуются соотношения условий совместности в классах обычных (соблюдающих точно «моментные ограничения» и обобщенных управлений). Полагаем, что

$$\mathcal{U} \triangleq \left\{ u \in U \mid \left(\int_{I_1} \gamma_i u \, d\eta_1 \right)_{i\in\overline{1,p}} \in Y \right\}, \quad \mathcal{V} \triangleq \left\{ v \in V \mid \left(\int_{I_2} \omega_j v \, d\eta_2 \right)_{j\in\overline{1,q}} \in Z \right\}$$

суть множества управлений, допустимых в смысле соблюдения Y- и Z-ограничений соответственно. Всюду в дальнейшем полагаем, что множества U и V таковы, что

$$\widetilde{U} = \mathrm{cl}(\{u * \eta_1 : u \in U\}, \tau_0(\mathcal{L}_1)); \quad \widetilde{V} = \mathrm{cl}(\{v * \eta_2 : v \in V\}, \tau_0(\mathcal{L}_2)),$$

где $(\mathbb{A}(\mathcal{L}_i), \tau_0(\mathcal{L}_i))$ есть подпространство тихоновской степени $\mathbb{R}^{\mathcal{L}_i}$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ в дискретной топологии, $i \in \overline{1,2}$. Также выполнены условия, используемые в задачах асимптотического анализа, связанных с достижимостью в условиях приближенного соблюдения ограничений:

$$\left(\gamma_i \in B_0(I_1,\mathcal{L}_1) \quad \forall i \in \overline{1,p}\right) \ \& \ \left(\omega_j \in B_0(I_2,\mathcal{L}_2) \quad \forall j \in \overline{1,q}\right).$$

При этих предположениях точные обычные управления всюду плотны[20] в пространстве точных обобщенных управлений, т.е. справедливы равенства:

$$\widetilde{U}_\partial = \mathrm{cl}(\{u * \eta_1 : u \in \mathcal{U}\}, \tau_*(\mathcal{L}_1)); \quad \widetilde{V}_\partial = \mathrm{cl}(\{v * \eta_2 : v \in \mathcal{V}\}, \tau_*(\mathcal{L}_2)).$$

Как следствие, $(\mathcal{U} \neq \varnothing) \Leftrightarrow (\widetilde{U}_\partial \neq \varnothing)$ и $(\mathcal{V} \neq \varnothing) \Leftrightarrow (\widetilde{V}_\partial \neq \varnothing)$. Пусть теперь $\mathcal{U} \neq \varnothing$, $\mathcal{V} \neq \varnothing$.

Предложение 3. *Обобщенный максимин* $\boldsymbol{V}$ *совпадает с максимином в классе обычных управлений:*

$$\boldsymbol{V} = \sup_{v \in \mathcal{V}} \inf_{u \in \mathcal{U}} f_0 \left(\left(\int_{I_1} \alpha_i u \, d\eta_1 \right)_{i \in \overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j v \, d\eta_2 \right)_{j \in \overline{1,l}} \right).$$

Из теоремы 1 и предложения 3 следует устойчивость по максимину:
Следствие. $\forall \zeta \in]0, \infty[\ \exists \theta_\zeta \in]0, \infty[$:

$$\left| \mathfrak{V}(\varepsilon, \delta) - \sup_{v \in \mathcal{V}} \inf_{u \in \mathcal{U}} f_0 \left(\left(\int_{I_1} \alpha_i u \, d\eta_1 \right)_{i \in \overline{1,k}}, \left(\int_{I_2} \beta_j v \, d\eta_2 \right)_{j \in \overline{1,l}} \right) \right| < \zeta$$
$$\forall \varepsilon \in]0, \theta_\zeta[\ \forall \delta \in]0, \theta_\zeta[.$$

В заключении раздела 2.6 рассматривается один конкретный пример задачи управления (с ограничениями на выбор возможного режима работы двигательной установки), в котором упомянутая устойчивость имеет место.

Третья глава состоит из четырех разделов. Рассматривается конкретная задача об игровом взаимодействии двух материальных точек в классе программных управлений:

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = a(t)u(t), \quad \dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = b(t)v(t) \tag{8}$$

на единичном промежутке времени $[0, 1]$; полагаем, что $y_1(0) = y_2(0) = z_1(0) = z_2(0) = 0$; $y_1(1) = y^0$, $z_1(1) = z^0$, где y^0, z^0 — фиксированные константы, функции $a = a(\cdot)$ и $b = b(\cdot)$ допускают равномерное приближение к.-п., н.спр. функциями на $[0, 1[$. Управления $u = u(\cdot)$ и $v = v(\cdot)$ полагаем определенными на «стрелке» $[0, 1[$, к.-п., н.спр. в/з функциями. Ограничения на u и v включают моментную и импульсную компоненты:

$$\int_0^1 (1 - t)a(t)u(t) \, dt = y^0, \quad \int_0^1 (1 - t)b(t)v(t) \, dt = z^0; \tag{9}$$

[20]Ченцов А.Г. К вопросу о точном и приближенном соблюдении ограничений в абстрактной задаче управления. // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. № 2, - с. 29–48

$$\int_0^1 |u(t)|\,dt \leqslant c_U, \quad \int_0^1 |v(t)|\,dt \leqslant c_V,$$

где c_U и c_V — фиксированные положительные константы. Таким образом, речь идет об управлениях с ограничениями на энергоресурс. Ограничения (9) связаны с краевыми условиями на координаты материальных точек. Рассмотрим области достижимости $G_\partial^{(1)}$, $G_\partial^{(2)}$ системы (8) по скоростной координате (то есть по y_2 и z_2) в последний момент времени $t = 1$ при точном соблюдении ограничений. В дальнейшем исследовании используются положения[21], касающиеся вопроса о том, как будут меняться области достижимости по отношению к $G_\partial^{(1)}$ и $G_\partial^{(2)}$ при ослаблении ограничений $y_1(1) \approx y^0$, $z_1(1) \approx z^0$ (вопрос об устойчивости). Введем при условиях $\mathcal{U} \neq \varnothing, \mathcal{V} \neq \varnothing$ в рассмотрение функционал

$$\Phi(u,v) = f_0\left(\int_0^1 a(t)u(t)\,dt,\ \int_0^1 b(t)v(t)\,dt\right) \to \sup_{v\in\mathcal{V}}\inf_{u\in\mathcal{U}};$$

здесь $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — множества допустимых управлений, определяемых (см. раздел 2.6) ограничениями задачи; полагаем далее, что функция f_0 определена и непрерывна на $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. В разделе 3.2, полагая выполненными условия $y^0 = z^0 = 0, a(t) \equiv 1,\ b(t) \equiv 1$, определяем «обычный» максимин

$$\mathbf{val} \triangleq \sup_{v\in\mathbb{F}_\partial^{(2)}}\ \inf_{u\in\mathbb{F}_\partial^{(1)}} f_0\left(\int_0^1 u(t)\,dt, \int_0^1 v(t)\,dt\right) = \sup_{z\in G_\partial^{(2)}}\ \inf_{y\in G_\partial^{(1)}} f_0(y,z) \in \mathbb{R},$$

где $\mathbb{F}_\partial^{(1)} = \mathcal{U}$, $\mathbb{F}_\partial^{(2)} = \mathcal{V}$ — непустые (в данном случае) множества допустимых управлений при точном соблюдении ограничений. Множества притяжения, играющие роль асимптотического аналога соответствующих областей достижимости, имеют вид[22]:

$$\left(AS_1 = \overline{G_\partial^{(1)}}\right)\ \&\ \left(AS_2 = \overline{G_\partial^{(2)}}\right).$$

В данном случае элементы AS_1 и AS_2 реализуются в классе секвенциальных приближенных решений, подобных решениям J.Warga.

---

[21] Ченцов А.Г. Ограничения асимптотического характера в задачах управления. // Инф. бюллетень №12 XIV Всеросс. конф. «Математическое программирование и приложения». Екатеринбург. 2011. – с.219–220

[22] Кожан М.М., Ченцов А.Г. К вопросу о корректности некоторых задач управления материальной точкой. // Проблемы управления и информатики. 2007. – № 1. – с. 5–15,

Предложение 4. *Справедливо равенство :*

$$\mathbb{V} \triangleq \max_{z \in AS_2} \min_{y \in AS_1} f_0(y, z) = \sup_{z \in G_\theta^{(2)}} \inf_{y \in G_\theta^{(1)}} f_0(y, z) = \mathbf{val},$$

то есть максимин в классе обобщенных управлений равен максимину в классе обычных управлений.

Предложение 5. *Имеет место устойчивость по максимину:*

$$\forall æ \in]0, \infty[\ \exists \zeta \in]0, \infty[: |\mathfrak{V}(\varepsilon, \delta) - \mathbf{val}| < æ\ \forall \varepsilon \in]0, \zeta[\ \forall \delta \in]0, \zeta[.$$

Заметим, что (достаточные) условия устойчивости, полученные в главе 2, не выполняются в рассматриваемой задаче. Однако, как видно из предложений 4,5, в данной задаче устойчивость имеет место. В существенности условий можно убедиться, если положить, например, $y^0 = c_U$ или $z^0 = c_V$. В этом случае обычная задача не будет совместна, а обобщенная получается совместной.

В разделе 3.2 исследуется устойчивость по максимину в классе неотрицательных управлений. Полагается при этом $y^0 = z^0 = a$, где $a \geqslant 0$. Наличие здесь общего краевого условия можно интерпретировать как обязательное условие встречи материальных точек (по координате), причем точка встречи задается, что позволяет игрокам раздельно решать вопрос о допустимости соответствующих программных управлений. Ограничиваемся случаем $0 < c_U \leqslant c_V$.

- Если $a = 0$, то задача о построении области достижимости не обладает устойчивостью при ослаблении ограничений на координату;
- Если $a = c_U$ или $a = c_V$, то устойчивость также отсутствует;
- Если $a > c_U$ или $a > c_V$, то несовместны задачи о построении областей достижимости для первого и второго игроков (как при точном соблюдении ограничений, так и при их ослаблении).

В разделе 3.4 доказано предложение, означающее на содержательном уровне устойчивость по максимину задачи (8), (9):

Предложение 6. *Пусть* $a \in]0, c_U[$, $f_0(x, y) = |x - y|$. *Тогда справедливо равенство:*

$$\max_{y \in AS_2} \min_{x \in AS_1} f_0(x, y) = \sup_{y \in G_\theta^{(2)}[a]} \inf_{x \in G_\theta^{(1)}[a]} f_0(x, y) = c_V - c_U.$$

Основные результаты диссертации

- Для линейной игровой задачи программного управления с фиксированным моментом окончания и ограничениями импульсного характера построено расширение в классе конечно-аддитивных мер и установлена устойчивость обобщенной задачи при изменении целевой функции (степень близости оценивается в метрике равномерной сходимости).

- Для абстрактной игровой задачи управления с ограничениями, включающими импульсную и моментную компоненты, построена обобщенная задача, значение которой определяет асимптотику реализуемых значений максимина при малом ослаблении ограничений моментного характера.

- Установлены условия, достаточные, в рассматриваемом классе задач, для устойчивости по максимину при ослаблении ограничений моментного характера.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю члену-корреспонденту РАН Александру Георгиевичу Ченцову за постановку задачи, постоянное внимание к работе и поддержку.

Глубоко признательна Юрию Владимировичу Авербуху, Анатолию Фёдоровичу Клеймёнову и Евгению Георгиевичу Пыткееву.

Публикации по теме диссертации

[1] *Ченцов А. Г., Шапарь Ю. В.* Об одной игровой задаче с приближенным соблюдением ограничений. // Доклады Академии Наук. Серия «Математика». – Т.427. – М., 2009. - с. 170–175.

[2] *Ченцов А. Г., Шапарь Ю. В.* К вопросу о расширении некоторых игровых задач в классе конечно-аддитивных мер. // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. Т.14 – вып.4. – 2009. - с. 830-832.

[3] *Ченцов А. Г., Шапарь Ю. В.* Конечно-аддитивные меры и расширения игровых задач с ограничениями асимптотического характера. // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. — № 3. 2010. - с. 89–111.

[4] *Ченцов А. Г., Шапарь Ю. В.* К вопросу о расширении одной игровой задачи управления в классе конечно-аддитивных мер. // Известия вузов. Математика. - № 7. - Казань, 2010. - с. 86–102.

[5] *Шапарь Ю.В.* Устойчивость по максимину одной задачи программного управления материальными точками. // Дифференциальные уравнения и процессы управления (электронный журнал). № 1.– 2011. - с. 3–18.

[6] *Ченцов А. Г., Шапарь Ю. В.* Конечно-аддитивные меры в конструкциях расширений некоторых игровых задач. //Динамические системы, управление и наномеханика: Тезисы Всероссийской конференции, Ижевск, 2009. - с. 51.

[7] *Шапарь Ю. В.* Об устойчивости по максимину одной задачи программного управления материальной точкой. //Проблемы теоретической и прикладной математики: Тезисы Всероссийской 41-й конференции, Екатеринбург, 2010. - с. 379–384.

[8] *Шапарь Ю. В.* К вопросу о взаимодействии материальных точек в условиях точного и приближенного соблюдения ограничений. // Современные проблемы математики: Тезисы Всероссийской 42-й конференции, Екатеринбург, 2011. - с. 62–64.

[9] *Chentsov A. G., Shapar Ju. V.* Extension of a problem of the game control. // Proceedings of the IFAC Workshop on Control Applications of Optimization, Volume 7 , Part 1. University of Jyvaskyla, Finland Identifier: 10.3182/20090506-3-SF-4003.00035; http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/41906.html

[10] *Chentsov A. G., Shapar Ju. V.* Extension of a game problem in the class of finitely additive measures. // The Fourth Int. conf. «Game theory and management GTM-2010» St.Petersburg, Abstracts, p. 35–38.

Шапарь Юлия Викторовна

РАСШИРЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ В КЛАССЕ КОНЕЧНО-АДДИТИВНЫХ МЕР

Автореферат

Подписано в печать 10.05.2011
Формат 60x84 1/16. Объем 1,5 п.л.
Тираж 100 экз. Заказ № 2774

102